Monômios de Cluster em Álgebras do Fenômeno Laurent de Grafos

Guilherme Zeus Dantas e Moura

Haverford College → University of Waterloo

2024-08-30

Agradecimentos

- Pesquisa conjunta com Ramanuja Charyulu Telekicherla Kandalam e Dora Woodruff.
- Agradecimentos ao orientador Pasha Pylyavskyy e ao assistente Robbie Angarone.
- Esta pesquisa foi realizada durante a Research Experience for Undergraduates na Universidade de Minnesota em 2023.
- Esta pesquisa foi parcialmente financiada pela bolsa RTG NSF/DMS-1745638 e por Haverford College.

Roteiro

Álgebras de Cluster

Uma **álgebra de cluster** de ordem n é

- um domínio integral[1] A, juntamente com
- alguns subconjuntos de tamanho n chamados de **clusters**,
- cuja união gera a álgebra A
- e que satisfazem várias condições.

Os elementos de um cluster são chamados de **variáveis de cluster**.

[1] Um domínio integral é um anel comutativo em que $ab \neq 0$ para todo $a, b \neq 0$.

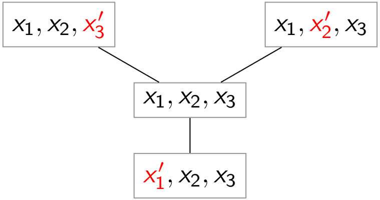
Mutação (1/2)

$$\boxed{x_1, x_2, x_3}$$

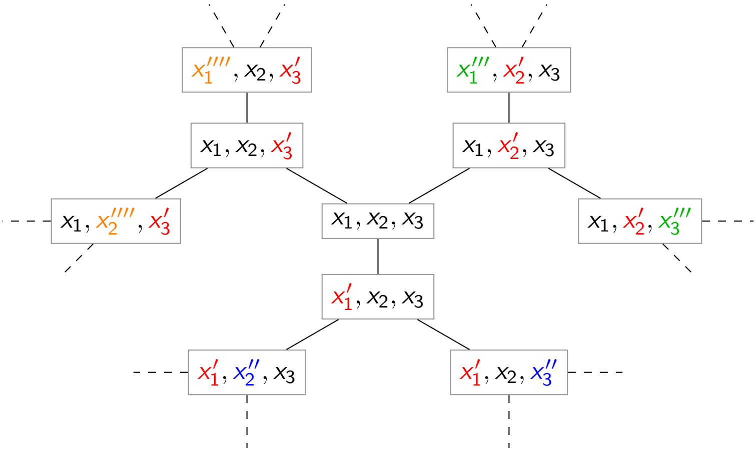
Mutação (1/2)

$$\begin{array}{c}\boxed{x_1, x_2, x_3} \\ | \\ \boxed{{\color{red}x_1'}, x_2, x_3}\end{array}$$

Mutação (1/2)



Mutação (1/2)



x_1'''', x_2, x_3'
x_1''', x_2', x_3
x_1, x_2, x_3'
x_1, x_2', x_3
x_1, x_2'''', x_3'
x_1, x_2, x_3
x_1, x_2', x_3'''
x_1', x_2, x_3
x_1', x_2'', x_3
x_1', x_2, x_3''

Mutação (2/2)

Regra de mutação:

$$\text{(variável antiga)} \cdot \text{(variável nova)} = \text{binômio de troca.}$$

Esse "binômio de troca" é uma soma de dois monômios em função das outras variáveis do cluster.

$$\boxed{x_1, x_2, x_3} \;\text{---}\; \boxed{{\color{red}x_1'}, x_2, x_3}$$

$$x_1 \cdot x_1' = P_1(x_2, x_3).$$

Mutação (2/2)

Regra de mutação:

$$\text{variável nova} = \frac{\text{binômio de troca}}{\text{variável antiga}}.$$

Esse "binômio de troca" é uma soma de dois monômios em função das outras variáveis do cluster.

$$\boxed{x_1, x_2, x_3} \longrightarrow \boxed{{\color{red}x_1'}, x_2, x_3}$$

$$x_1' = \frac{P_1(x_2, x_3)}{x_1}.$$

Escrevendo como função racional

Proposição

Fixe um cluster. Qualquer variável de cluster pode ser escrita como uma função racional (razão de dois polinômios) em função dos elementos desse cluster.

$$\boxed{x_1, x_2, x_3} - \boxed{x_1', x_2, x_3} - \boxed{x_1', x_2'', x_3} - \boxed{x_1''', x_2', x_3} \cdots\cdots \boxed{y_1, y_2, y_3}$$

$$y_\bullet = \frac{R(x_1, x_2, x_3)}{S(x_1, x_2, x_3)}.$$

Escrevendo como função racional

Proposição

Fixe um cluster. Qualquer variável de cluster pode ser escrita como uma função racional (razão de dois polinômios) em função dos elementos desse cluster.

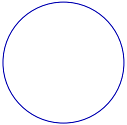
$$\boxed{x_1, x_2, x_3} - \boxed{x_1', x_2, x_3} - \boxed{x_1', x_2'', x_3} - \boxed{x_1''', x_2', x_3} \; \text{- - - - - -} \; \boxed{y_1, y_2, y_3}$$

$$y_\bullet = \frac{R(x_1, x_2, x_3)}{S(x_1, x_2, x_3)}.$$

Teorema (Fenômeno de Laurent)

O denominador S é um monômio.

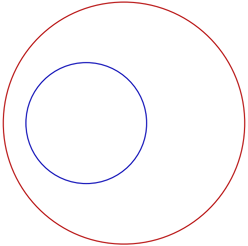
Contexto



Álgebras Cluster
Fomin and Zelevinsky (2002)

Contexto

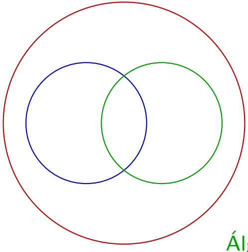
Álgebras do Fenômeno Laurent (LP)
Lam and Pylyavskyy (2016a)



Álgebras Cluster
Fomin and Zelevinsky (2002)

Contexto

Álgebras do Fenômeno Laurent (LP)
Lam and Pylyavskyy (2016a)



Álgebras Cluster
Fomin and Zelevinsky (2002)

Álgebras LP de Grafos
Lam and Pylyavskyy (2016b)

Álgebras LP de Grafos

Uma **álgebra LP de grafos** é

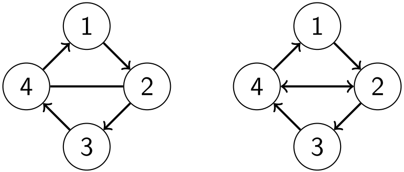
- uma álgebra de fenômeno Laurent (generalização de álgebras de cluster),
- cuja estrutura é determinada por um grafo direcionado Γ.

Notação nos diagramas de grafos direcionados

Seja Γ um grafo direcionado com conjunto de vértices $[n] = \{1, \ldots, n\}$.

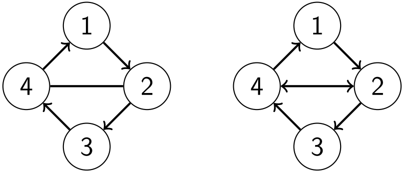
Notação nos diagramas de grafos direcionados

Seja Γ um grafo direcionado com conjunto de vértices $[n] = \{1, \ldots, n\}$.
Se uma aresta é **bidirecionada**, a desenhamos sem setas.

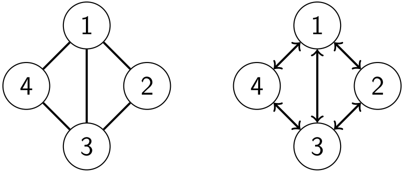


Notação nos diagramas de grafos direcionados

Seja Γ um grafo direcionado com conjunto de vértices $[n] = \{1, \ldots, n\}$.
Se uma aresta é **bidirecionada**, a desenhamos sem setas.

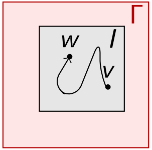


Se todas as arestas de Γ são bidirecionais, chamamos Γ de **não direcionado**.



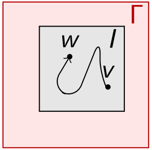
Conectividade Forte

Um subconjunto não vazio $I \subset [n]$ é **fortemente conexo** se, para todo $v, w \in I$, existe um caminho direcionado $v \to w$ dentro de I.

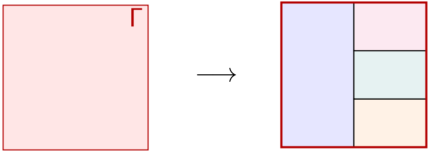


Conectividade Forte

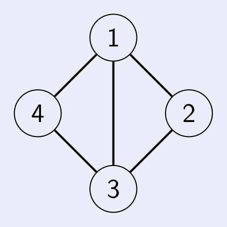
Um subconjunto não vazio $I \subset [n]$ é **fortemente conexo** se, para todo $v, w \in I$, existe um caminho direcionado $v \to w$ dentro de I.



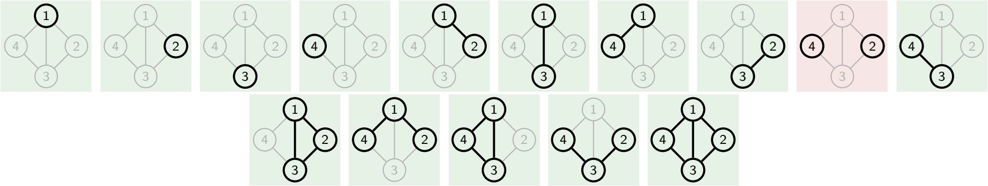
Um grafo direcionado é particionado em **componentes fortemente conexas**, que são subconjuntos maximais de vértices fortemente conexos.



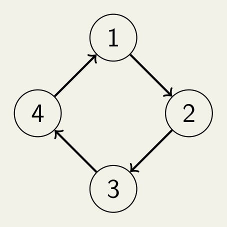
Conectividade Forte (Exemplos 1/2)



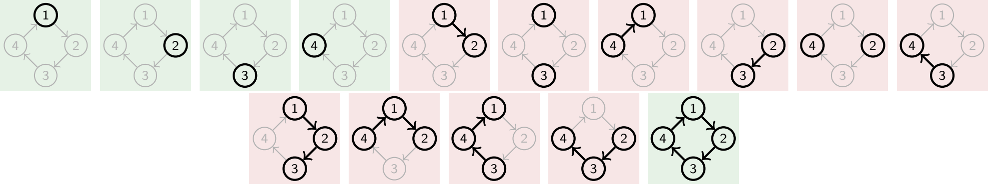
Todos os subconjuntos são fortemente conexos, exceto 24.



Conectividade Forte (Exemplos 1/2)



Os subconjuntos fortemente conexos são 1, 2, 3, 4 e 1234.



Coleções Aninhadas

Uma coleção $\mathcal{S}$ de subconjuntos é **aninhada** se:

(Condição 1) Para todo $I, J \in \mathcal{S}$,

$$I \cap J = \varnothing \quad \text{ou} \quad I \subset J \quad \text{ou} \quad I \subset J.$$

(Condição 2) Para quaisquer conjuntos disjuntos $I_1, I_2, \ldots, I_i \in \mathcal{S}$, esses conjuntos são as componentes fortemente conexas de sua união.

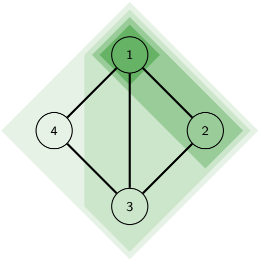
Observação A condição 2 implica que $I \in \mathcal{S}$ deve ser fortemente conexo.

Coleções Aninhadas (Exemplo 1/4)

Uma coleção é **aninhada** se:

(1) $I \cap J = \varnothing$ ou $I \subset J$ ou $I \subset J$.

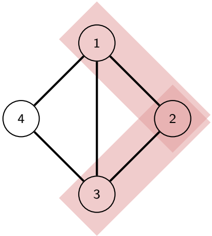
(2) Conjuntos disjuntos são as componentes fortemente conexas de sua união.



Afirmação $\{1, 12, 123, 1234\}$ é aninhado.

Coleções Aninhadas (Exemplo 2/4)

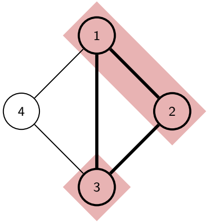
Uma coleção é **aninhada** se:
(1) $I \cap J = \varnothing$ ou $I \subset J$ ou $I \subset J$.
(2) Conjuntos disjuntos são as componentes fortemente conexas de sua união.



Afirmação $\{12, 23\}$ NÃO é aninhado.

Coleções Aninhadas (Exemplo 3/4)

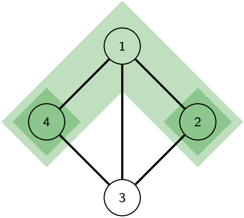
Uma coleção é **aninhada** se:
(1) $I \cap J = \varnothing$ ou $I \subset J$ ou $I \subset J$.
(2) Conjuntos disjuntos são as componentes fortemente conexas de sua união.



Afirmação $\{12, 3\}$ NÃO é aninhado, pois as componentes fortemente conexas de $12 \cup 3$ NÃO são 12 e 3.

Coleções Aninhadas (Exemplo 4/4)

Uma coleção é **aninhada** se:
(1) $I \cap J = \varnothing$ ou $I \subset J$ ou $I \subset J$.
(2) Conjuntos disjuntos são as componentes fortemente conexas de sua união.



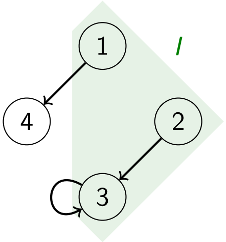
Afirmação $\{2, 4, 124\}$ é aninhado.

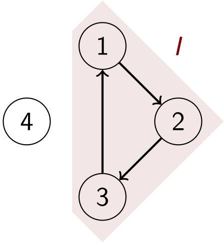
Funções Acíclicas

Consideramos funções $f : I \subset [n] \to [n]$ tais que, para todo $v \in I$,

$$f(v) = v \quad \text{ou} \quad (v, f(v)) \text{ é uma aresta de } \Gamma.$$

Uma **função acíclica** em I é uma função f sem ciclos (loops são permitidos).

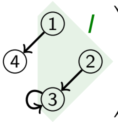


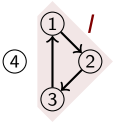


O **peso** de uma função f é

$$w(f) = \prod_{i \in I} \tilde{X}_{f(i)}, \qquad \text{onde } \tilde{X}_{f(i)} = \begin{cases} X_{f(i)} & \text{se } f(i) \neq i \\ A_{f(i)} & \text{se } f(i) = i. \end{cases}$$

Multiplica-se X_j para uma aresta $i \to j$, e multiplica-se A_i para um laço $i \to i$.

$w\Big($ 

$\Big) = X_4 X_3 A_3,$ $\qquad w\Big($ 

$\Big) = X_2 X_3 X_1.$

Observação Para ciclos, $w(f) = \prod_{i \in I} X_i$.

Variáveis Y_I (Exemplo 1/2)

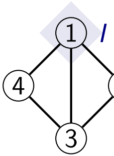
Dado um subconjunto I, definimos

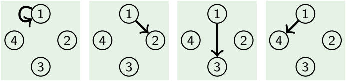
$$Y_I = \frac{1}{\prod_{i \in I} X_i} \cdot \sum_{\substack{\text{acyclic} \\ f : I \to [n]}} w(f)$$

Variáveis Y_I (Exemplo 1/2)

Dado um subconjunto I, definimos

$$Y_I = \frac{1}{\prod_{i \in I} X_i} \cdot \sum_{\substack{\text{acyclic} \\ f : I \to [n]}} w(f)$$

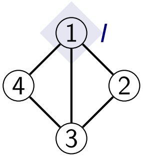


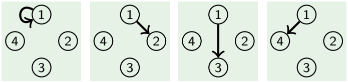


Variáveis Y_I (Exemplo 1/2)

Dado um subconjunto I, definimos

$$Y_I = \frac{1}{\prod_{i \in I} X_i} \cdot \sum_{\substack{\text{acyclic} \\ f : I \to [n]}} w(f)$$



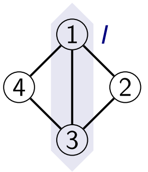


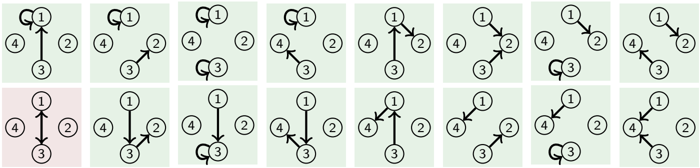
$$Y_1 = \frac{A_1 + X_2 + X_3 + X_4}{X_1}.$$

Variáveis Y_I (Exemplo 2/2)

Dado um subconjunto I, definimos

$$Y_I = \frac{1}{\prod_{i \in I} X_i} \cdot \sum_{\substack{\text{acyclic} \\ f : I \to [n]}} w(f)$$

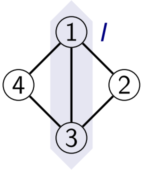


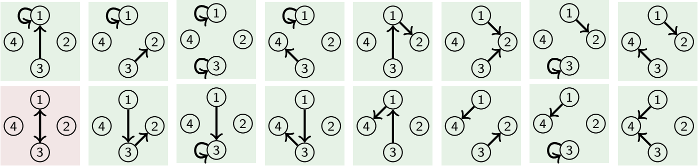


Variáveis Y_I (Exemplo 2/2)

Dado um subconjunto I, definimos

$$Y_I = \frac{1}{\prod_{i \in I} X_i} \cdot \sum_{\substack{\text{acyclic} \\ f : I \to [n]}} w(f)$$





$$Y_{13} = \frac{(A_1 + X_2 + X_3 + X_4)(X_1 + X_2 + A_3 + X_4) - X_1 X_3}{X_1 X_3}$$

Após os cálculos, temos

$$Y_{13} = Y_1 Y_3 - 1.$$

Álgebra LP de Grafos (Lam and Pylyavskyy (2016b))

Dado um grafo direcionado Γ, sua álgebra LP de grafos $\mathcal{A}_\Gamma$ pode ser descrita como a álgebra gerada por

$$\{X_1, \ldots, X_n\} \cup \{\, Y_I \mid I \text{ é fortemente conexo}\},$$

com anel de coeficientes $R = \mathbb{Z}[A_1, \ldots, A_n]$.

Estrutura dos Clusters

Teorema (Lam and Pylyavskyy (2016b))

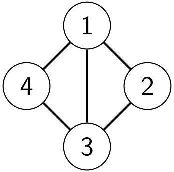
A álgebra LP de grafos $\mathcal{A}_\Gamma$ possui:

- *variáveis de cluster*
$$\{X_1, \ldots, X_n\} \cup \{Y_I \mid I \text{ é fortemente conexo}\},$$
- *clusters da forma*
$$\{X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}\} \cup \{Y_I \mid I \in \mathcal{S}\}$$
onde $\mathcal{S}$ é uma coleção aninhada máxima em $\Gamma \setminus \{i_1, i_2 \ldots i_k\}$.

As variáveis Y são indexadas pela coleção aninhada $\mathcal{S}$,
e as variáveis X são indexadas pelos vértices restantes.

Um **monômio de cluster** é um monômio com variáveis do mesmo cluster.

Examplo de Monômios de Cluster



Coleção aninhada	Cluster	Monômio de Cluster
$\varnothing$	$\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$	$X_1^2 X_2$
$2, 4$	$\{X_1, X_3, Y_2, Y_4\}$	$X_3 Y_2 Y_4^3$
$1, 12, 123, 1234$	$\{Y_1, Y_{12}, Y_{123}, Y_{1234}\}$	$Y_1 Y_{123}^5 Y_{1234}$

Um monômio formado apenas por variáveis Y é um monômio de cluster se for suportado por uma coleção aninhada $\mathcal{S}$.

Conjectura Principal (Lam and Pylyavskyy (2016b))

Lembrando que $\mathcal{A}_\Gamma$ é gerada pelas variáveis de cluster, e que
um **monômio de cluster** é um monômio com variáveis do mesmo cluster.

Conjectura (Lam and Pylyavskyy (2016b))

(1) *Monômios de cluster formam uma **base linear** para $\mathcal{A}_\Gamma$ sobre $R = \mathbb{Z}[A_1, \ldots, A_n]$.*

- ***(1a)*** *Monômios de cluster são **linearmente independentes**.*
- ***(1b)*** *Monômios de cluster **linearmente geram** $\mathcal{A}_\Gamma$.*

(2) *Qualquer monômio nas variáveis de cluster de $\mathcal{A}_\Gamma$ pode ser expresso como uma combinação linear em R de monômios de cluster com **coeficientes positivos**.*

Conjectura Principal (Lam and Pylyavskyy (2016b))

Lembrando que $\mathcal{A}_\Gamma$ é gerada pelas variáveis de cluster, e que
um **monômio de cluster** é um monômio com variáveis do mesmo cluster.

Teorema (DTW (2024^+))

(1) *Monômios de cluster formam uma* ***base linear*** *para* $\mathcal{A}_\Gamma$ *sobre* $R = \mathbb{Z}[A_1, \ldots, A_n]$.

(1a) *Monômios de cluster são* ***linearmente independentes****.*

(1b) *Monômios de cluster* ***linearmente geram*** $\mathcal{A}_\Gamma$.

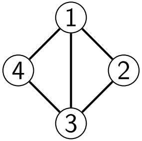
Conjectura (Lam and Pylyavskyy (2016b))

(2) *Qualquer monômio nas variáveis de cluster de* $\mathcal{A}_\Gamma$ *pode ser expresso como uma combinação linear em* R *de monômios de cluster com* ***coeficientes positivos****.*

Exemplo de Positividade

Lembre que, em um exemplo anterior, calculamos

$$Y_{13} = \frac{(A_1+X_2+X_3+X_4)(X_1+X_2+A_3+X_4)-X_1X_3}{X_1X_3} = Y_1Y_3 - 1.$$



Observe que Y_1Y_3 é um monômio nas variáveis de cluster,
mas Y_1Y_3 NÃO é um monômio de cluster.
Ainda assim,

$$Y_1Y_3 = Y_{13} + 1,$$

portanto Y_1Y_3 é uma combinação linear positiva de monômios de cluster.

Se eu tivesse mais tempo...

...falaria sobre:

- a prova de (1a) "monômios de cluster são linearmente independentes".
- a prova de (1b) "monômios de cluster linearmente geram $\mathcal{A}_\Gamma$".
- algumas famílias de grafos em que (2) positividade é mais fácil de provar .

Obrigado pela atenção!

Fomin, Sergey and Andrei Zelevinsky (Apr. 1, 2002). "Cluster Algebras I: Foundations". In: *Journal of the American Mathematical Society* 15.2, pp. 497–529. arXiv: `math/0104151`.

Lam, Thomas and Pavlo Pylyavskyy (2016a). "Laurent Phenomenon Algebras". In: *Cambridge Journal of Mathematics* 4.1, pp. 121–162. arXiv: `1206.2611 [math]`.

— (2016b). "Linear Laurent Phenomenon Algebras". In: *International Mathematics Research Notices* 2016.10, pp. 3163–3203. arXiv: `1206.2612 [math]`.

Observações sobre Positividade

Já sabemos decompor positivamente monômios nas váriaveis de cluster da forma

$$X_\bullet \cdots X_\bullet Y_\bullet \cdots Y_\bullet$$

que não são monômios de cluster.

Os monômios nas variáveis de cluster de $\mathcal{A}_\Gamma$ que são mais desafiadores de decompor são monômios compostos apenas por variáveis Y.

Pergunta Muito Difícil Como decompor positivamente

$$Y_{I_1} Y_{I_2} \cdots Y_{I_k}?$$

Pergunta Difícil Como decompor positivamente

$$Y_I Y_J?$$

Observação Quando Γ é não-direcionado, basta responder a segunda pergunta.