Álgebra Linear em Combinatória

Versão Reduzida

Guilherme Zeus Dantas e Moura
guilhermezeus.com

Problema 6 (Clássico)**.** Seja n um inteiro positivo. São dados $2n+1$ números reais com a propriedade de que, sempre que um deles é removido, os $2n$ restantes podem ser divididos em dois conjuntos de n elementos que possuem a mesma soma de elementos. Prove que todos os números são iguais.

Problema 1. Sejam $A_1, \ldots, A_r$ subconjuntos distintos de $[n]$ tal que $|A_i|$ é ímpar para todo i e $|A_i \cap A_j|$ é par para todos $i \neq j$. Encontre o maior valor possível de r.

Problema 4. Em uma festa com $2n$ pessoas, cada pessoa tem um número par de amigos. Prove que há duas pessoas que têm um número par de amigos em comum.

Problema 8 (China West 2002)**.** Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ subconjuntos não vazios de $[n]$. Prove que existem subconjuntos disjuntos $I, J \subset [n+1]$ tais que

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{j \in J} A_j.$$

Problema 10 (Russia 2001)**.** Uma competição com n questões foi feita por m competidores. Cada questão vale uma quantidade positiva diferente de pontos. Após as provas serem avaliadas, percebeu-se que era possível escolher as pontuações de cada questão de modo que qualquer ranking dos participantes pudesse ser atingido. Qual o maior valor possível de m?

Problema 14 (Alemanha TST 2004)**.** Seja G um grafo simples finito. Existe uma lâmpada em cada vértice e, inicialmente, todas estão apagadas. Em cada passo, podemos escolher um vértices e mudar o estado das lâmpadas dele e de seus vizinhos. Prove que é possível deixar todas as lâmpadas acesas simultaniamente.

Problema 15 (USAMO 2008)**.** Numa convenção matemática, alguns pares de matemáticos são amigos. No jantar, cada participante senta em alguma das duas salas. Cada matemático insiste em ter uma quantidade par de amigos na mesma sala. Prove que o número de maneiras de separar os matemáticos nas duas salas é uma potência de 2.

Problema 17 (Irã 2006, Capacidade de Sperner do Triângulo Cíclico)**.** Seja A uma coleção de vetores de tamanho n de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ com a propriedade de que para quaisquer dois vetores distintos $a, b \in A$, existe alguma coordenada i tal que $b_i \equiv a_i + 1 (\text{mod} 3)$. Prove que $|A| \leq 2^n$