

Miscelânea em Combinatória

Guilherme Zeus Dantas e Moura

guilhermezeus.com

Problema 1 (Cone Sul 2001/4). Um polígono de área S está contido no interior de um quadrado de lado a . Prove que há dois pontos do polígono cuja distância é pelo menos S/a .

Dica. Princípio Extremal.

Problema 2 (Ibero 1997/6). Seja $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_{1997}\}$ um conjunto de 1997 pontos no interior de um círculo de raio 1, onde P_1 é o centro do círculo. Seja x_k a distância de P_k ao ponto mais próximo em \mathcal{P} , mas diferente dele. Mostre que $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{1997}^2 \leq 9$.

Dica. Áreas.

Problema 3. Seja C um círculo de raio 16 e A um anel com raio interior 2 e raio exterior 3. Suponha que um conjunto S de 650 pontos são selecionados no interior de C . Prove que podemos colocar o anel A no plano de modo que ele cubra pelo menos 10 pontos de S .

Dica. Dualidade. Áreas.

Problema 4. Dado um conjunto S de n pontos no plano, prove que existem pelo menos \sqrt{n} pontos em S tais que não há três vértices de um triângulo equilátero.

Dica. Princípio Extremal.

Problema 5 (Romênia TST 1999). Sejam $A_1, \dots, A_m \subset [n]$ com $|A_i| = 3$ e $|A_i \cap A_j| \leq 1$ para todos $i \neq j$. Prove que existe $X \subset [n]$ tal que $|X| \geq \lfloor \sqrt{2n} \rfloor$ e $X \not\subset A_i$ para todo i .

Dica. Princípio Extremal.

Problema 6 (Metrópolis 2020/3). Seja $n > 1$ um inteiro. Um conjunto $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{Z}_{>0}$ é *sortudo* se $a_1 + \dots + a_n$ pode ser formado de maneira única com as parcelas a_1, \dots, a_n .

(a) Prove que existe um conjunto sortudo $\{a_1, \dots, a_n\}$ com $a_1 + \dots + a_n < n \cdot 2^n$.

Dica. Considere $a_i = 2^n - 2^{i-1}$.

(b) Prove que todo conjunto sortudo $\{a_1, \dots, a_n\}$ satisfaz $a_1 + \dots + a_n > n \cdot 2^{n-1}$.

Dica. Prove que $a_i \geq 2^{n-1}$.

Problema 7. Cada uma de seis pessoas inicialmente sabe uma fofoca pessoal. Em uma ligação, duas pessoas compartilham todas as fofocas que sabem. Determine o número mínimo de ligações para que todas as pessoas saibam todas as fofocas.

Dica. Observe quantas ligações em respeito à uma certa fofoca são necessárias para que todos descubram. Também observe o número total de fofocas conhecidas por todos em cada ligação.

Problema 8 (Erdős–Szekeres). Os inteiros de 0 a 100 são escritos em qualquer ordem. Prove que 11 deles formam uma sequência monotonicamente crescente ou decrescente.

Solução (Engel). Provaremos que, para $n \geq (p-1)(q-1) + 1$ toda sequência de n inteiros contém uma subsequência monotonicamente crescente de tamanho p ou uma subsequência monotonicamente decrescente de tamanho q .

Seja L_m o tamanho máximo de uma sequência monotonicamente crescente com o último elemento m e R_m o tamanho máximo de uma sequência monotonicamente decrescente começando com m . Note que, para $m \neq k$, $L_m \neq L_k$ ou $R_m \neq R_k$. Isso segue do fato de que $m > k$ ou $m < k$. Portanto, todos os pares (L_m, R_m) com $m = 1, 2, \dots, n$ são distintos. Supondo que não existam tais subsequências, L_m pode assumir apenas os valores $1, 2, \dots, p-1$ e R_m apenas os valores $1, 2, \dots, q-1$. Isso fornece $(p-1)(q-1)$ casas diferentes para os pares. Mas $n \geq (p-1)(q-1) + 1$ e o princípio da casa dos pombos levam a uma contradição.

Problema 9 (IMO 1989/3). Sejam n e k inteiros positivos e seja S um conjunto de n pontos no plano tal que não há três pontos de S colineares e, para cada ponto P em S , existem pelo menos k pontos de S que equidistam de P . Prove que $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

Dica. Conte os pares $(A, \{B, C\})$, $i \neq j \neq \ell \neq i$ tais que $AB = AC$.

Problema 10 (Irã 2010). Temos n pontos no plano de modo que não existam três deles colineares. Prove que o número de triângulos com vértices nestes pontos e cuja área é exatamente 1 não pode ser maior que $\frac{2}{3}(n^2 - n)$.

Dica. Conte o número de $(\{A, B\}, C)$ tais que $\triangle ABC$ tem área 1.

REFERÊNCIAS

- [1] Arthur Engel (1998). *Problem-Solving Strategies*.
- [2] Bruno Holanda (2018). *Tópicos em Combinatória (Avançado)*. Farias Brito.
- [3] Adrian Tang (2009). *Combinatorics and Combinatorial Geometry*. Canada IMO Winter Camp 2009.